EP III - Seminar

Hyperfeinstruktur

Beobachtung Bei sehr hoher spektraler Auflösung findet man experimentell, dass jede der beiden Feinstrukturkomponenten der Übergänge wieder in zwei Komponenten aufspaltet, deren Abstand beim H-Atom kleiner ist als die Dopplerbreite. Daher ist die **Hyperfeinstruktur** nur mit dopplerfreien spektroskopischen Methoden auflösbar.

Erklärung Wegen ihrer räumlichen Ausdehnung besitzen die Atomkerne einen mechanischen Drehimpuls $\vec{I}$, den **Kernspin** mit der Kernspinquantenzahl I. Der Spin des Atomkerns setzt sich aus der Summer der Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen der Protonen und Neutronen zusammen.

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \cdot \hbar$$

So wie sich die Feinstruktur auf Kopplung des Elektronenspins mit dem Bahndrehimpuls zurückführen lässt, kann man auch die Hyperfeinstruktur auf die Kopplung des Kernspins $\vec{I}$ mit dem Gesamtdtehimpuls $\vec{j}$ des Elektrons bzw. dem vom Gesamtdrehimpuls erzeugten inneren Magnetfeld $\vec{B}_j$ zurückführen.
Analog zum Elektronendrehimpuls kann die Projektion auf die z-Richtung die $(2I+1)$ Werte $I_z = m_I \cdot \hbar$ mit $-I \leq m_I \leq I$ annehmen.
Mit dem Kernspin I ist über das gyromagnetische Verhältnis γ_K ein magnetische Kernmoment $\vec{\mu}_I$ verknüpft:

$$\vec{\mu}_I = \gamma_K \vec{I}$$

Analog zum Bohrschen Magneton wird als Einheit das **Kernmagneton** eingeführt:

$$\mu_K = \frac{e}{2m_p} \cdot \hbar = \frac{m_e}{m_p} \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar = \frac{m_e}{m_p} \cdot \mu_B = \frac{\mu_B}{1836} = 5,05 \cdot 10^{-27} JT^{-1}$$

Mit hilfe dieser Einheit lässt sich das gyromagnetische Verhältnis γ_K in den dimensionslosen **Kern-g-Faktor** transformieren:

$$\vec{\mu}_I = \gamma_K \cdot \vec{I} = g_I \cdot \frac{\mu_K}{\hbar} \vec{I}$$

Das magnetische Kernmoment liefert zwei Beiträge zur Aufspaltung und Verschiebung von Energeinieveaus der Elektronenhülle:

- Die Wechselwirkung des magnetischen Kernmoments mit dem Magnetfeld, das von den Elektronen am Kernort erzeug wird (Zeemann-Effekt des Kernmomentes mit dem atomaren Magnetfeld)
- Die Wechselwirkung des elektronischen magnetischen Momentes mit dem vom Kernmoment erzeugten Magnetfeld

Das magnetische Kernmoment $\vec{\mu}_I$ hat in dem vom Elektron mit dem Drehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ am Kernort erzeugten inneren Magnetfeld $\vec{B}_j$ die Energie

$$E_{I,j} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j = -|\vec{\mu}_I| \cdot |\vec{B}_j| \cdot cos\left(\measuredangle(\vec{j}, \vec{I})\right)$$

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{F} = \vec{j} + \vec{I}$ des Atoms ist eine Erhaltungsgröße mit

$$|\vec{F}| = \sqrt{F(F+1)} \cdot \hbar$$

wobei $j - I \leq F \leq j + I$ und $F_z = m_F \cdot \hbar$ Wegen $\vec{j} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2}(F^2 - j^2 - I^2)$ ergibt sich

$$cos\left(\measuredangle(\vec{j}, \vec{I})\right) = \frac{\vec{j} \cdot \vec{I}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{I}|} = \frac{1}{2} \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1) \cdot I(I+1)}}$$

und somit als Energieaufspaltung

$$E_{I,j} = -|\vec{\mu}_I| \cdot |\vec{B}_j| \cdot \frac{1}{1} \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1) \cdot I(I+1)}}$$

Die Hyperfeinenergie des H-Atom beträgt dann

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} \cdot [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)]$$

$$E_{HFS} = E_{n,l,j} + \frac{A}{2} \cdot [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)]$$

wobei die Hyperfeinkonstante $A = \frac{g_I \mu_K B_j}{\sqrt{j(j+1)}}$ vom Gesamtdrehimpuls $\vec{j}$ des Elektrons abhängt.

Das innere Magnetfeld $\vec{B}_j(0)$ am Ort $\vec{r} = 0$ des Kerns hängt außer vom Drehimpuls j des Elektrons von seiner räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit ab, die durch die Wellenfunktion $|\psi_{n,l}|^2$ bestimmt wird. Für S-Zustände gilt also $A = \frac{2}{3}\mu_0 g_e \mu_B g_I \mu_K |\psi_n(r=0)|^2$

Anwendung Eine Messung der Hyperfeinstruktur ist gleichzeitig eine Messung der Eigenschaften der Elektronenhülle (wegen B_j) und eine Messung der Kerneigenschaften (wegen g_j). Im Falle von Wasserstoff sind die Kerneigenschaften durch Kernspinresonanzmessungen sehr genau bekannt. Da g_I für das Proton genau bekannt ist, wurde aus der Messung der Hyperfeinstruktur zum ersten Mal die Abweichung des g-Faktors des Elektrons von 2 bestimmt zu $g_s = 2,0023$.
Für den Wasserstoff Grundzustand ist $j = I = \frac{1}{2}$ also $F = 0$ oder $F = 1$. Der magnetische Dipolübergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturkomponenten F=0 und F=1 im $1^2S_{\frac{1}{2}}$-Zustand hat eine Wellenlänge im Mikrowellengebiet.

Dieser Übergangn spielt in der Radioastronomie eine wichtige Rolle, weil seine Messung Auskunft über Dichteverteilung, Geschwindigkeit uen und Temperaturen von Wasserstoffatomen im Universum gibt. Bei größeren Atomen gibt es weitere Beitrüge zur Hyperfeinstruktur, wenn der Atomkern ein elektrisches Quadrupolmoment hat.

Aufgaben

1. Was ist die Hyperfeinwechselwirkung? (Skript)
2. Die Energie infolge der Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Elektrons und des Kerns ist proportional zu $(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_N \mu_B}{r^3})$ wobei r der Abstand des Elektrons vom Kern ist. Zeigen Sie, dass die Hyperfeinstrukturaufspaltung von der Größenordnung $10^{-5} eV$ ist, was zu einer Hyperfeinstruktur der Spektrallinien der Größenordnung 10^{-2} Angström (Quantenphysik und statistische Physik, Alonso/Finn)
3. Die Hyperfeinaufspaltung ist auch proporional zu $\vec{I} \cdot \vec{J}$, wobei $\vec{I}$ der Kernspin und $\vec{J}$ der Elektronendrehimpuls ist. Analysieren Sie die Hyperfeinstrukturaufspaltung der elektronischen Zustände $^2S_{\frac{1}{2}}$, $^2P_{\frac{1}{2}}$ und $^2P_{\frac{3}{2}}$ des ^{23}Na $(I = \frac{3}{2})$. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Niveaus und ihren relativen Abstand. STellen Sie Ihre Resultate in einem Diagramm der Energieniveaus dar. (Quantenphysik und statistische Physik, Alonso/Finn)

Quellen:

a) Skript S. 116-117
b) Demtröder S. 166-169
c) Alonso/Finn S. 352